

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и
обслуживающих технологий
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Института физико-
математического образования,
информационных и обслуживающих
технологий

« 17 »  Е.А. Журавлева
2025 г.

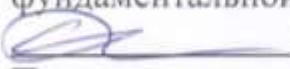
Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине

Спецкурс по фундаментальным направлениям современной математики

По направлению подготовки	01.04.01 Математика
Магистерская программа	—
Квалификация выпускника	магистр
Форма обучения	очная
Курс	2 курс

Разработчик
Доцент, Давыскиба О.В.
Заведующий кафедрой
фундаментальной математики
 Темникова С.В.
Протокол
от « 13 » сентября 2025 г. № 7

Луганск 2025

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины (модуля) «Спецкурс по фундаментальным направлениям современной математики» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины (модуля).

1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС – установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изменениями и дополнениями).

1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на овладение следующими компетенциями:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Профессиональные	
ПК-1 – способен применять результаты научных исследований при решении профессиональных задач, самостоятельно осуществлять научное исследование.	ПК-1.1. Умеет математически корректно формулировать и решать основные профессиональные задачи на основе результатов научных исследований в области математики. ПК-1.2. Способен самостоятельно планировать и осуществлять научное исследование, направленное на решение профессиональных задач, на основе отбора и использования результатов перспективных научных исследований в области фундаментальной математики и современных цифровых технологий.

1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1 Тензорная алгебра и тензорный анализ	ПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, экзамен
Тема 2. Элементы римановой геометрии	ПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, экзамен
Тема 3. Основные понятия римановой геометрии. Риманова геометрия в	ПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный

целом		опрос, экзамен
Промежуточная аттестация	ПК-1	Экзамен (письменный)

1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код компетенции	Результаты сформированности
ПК-1. Способен применять результаты научных исследований при решении профессиональных задач, самостоятельно осуществлять научное исследование	<p>Знает: ключевые принципы формирования образовательной среды; основные понятия, методы и строгие доказательства фактов основных разделов дисциплины «Спецкурс по фундаментальным направлениям современной математики»;</p> <p>Умеет: использовать результаты научных исследований при решении конкретных образовательных и исследовательских задач; применять теоретические знания к решению задач по данной дисциплине;</p> <p>Владеет навыками: современными методами науки для самостоятельного научного исследования; различными приемами использования идеологии дисциплины «Спецкурс по фундаментальным направлениям современной математики» к доказательству теорем и решению задач курса</p>

1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Вид учебной работы	Количество баллов		
	ОФО	О-ЗФО	ЗФО
Устные ответы на семинарских занятиях			
Выполнение и защита практических/лабораторных работ	30		
Самостоятельная работа	20		
Иные виды учебной работы (подготовка презентации, написание реферата, решение зад и др.)			
Экзамен (письменный)	50		
Всего за семестр	100		

Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбал- льная система оценивания экзамена	100- балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100- балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	

Хорошо	83–89	В – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	75–82	С – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	63–74	Д – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	50–62	Е – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	21–49	FX – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	0–20	F – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над	

		материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	
--	--	--	--

2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

2.1. Оценочные средства текущего контроля

Примерные задания для контрольных работ и письменного экзамена:

Задание 1: Изучить указанную в варианте тему и выступить с ней на практическом занятии:

Задание 2: Для заданной в варианте поверхности выполните следующее:

1. Задайте локальные координаты на поверхности.
2. Найдите метрику индуцированную вложением поверхности в R^3
3. Найдите главные кривизны, среднюю и гауссову кривизну.
4. Вычислите символы Кристоффеля.
5. Найдите тензор кривизны.
6. Найдите тензор Риччи и сравните его с метрическим тензором.
7. Найдите скалярную кривизну.

Указание. Для самостоятельной работы и выполнения заданий используйте систему аналитических вычислений **Maple**.

Вариант № 1.

- Понятие тензорного произведения. Понятие тензора. Типы тензоров. Примеры. Операции над тензорами. Тензорные поля, примеры.
- Поверхность $z = x^2 + (y/2)^2$.

Вариант № 2.

- Понятие дифференцируемого многообразия. Карты, атласы, функции перехода. Примеры. Понятие касательного вектора, касательного пространства. Понятие кокасательного вектора, кокасательного пространства.
- Поверхность $z^2 = (x/3)^2 + y^2$, $z > 0$.

Вариант № 3.

- Понятие риманова многообразия. Примеры. Метрический тензор. Ковариантная производная. Тензор кривизны, тензор Риччи.
- Поверхность $z = (x/3)^2 + y^2$.

Вариант № 4.

- Кривые в евклидовом пространстве. Кривизна, кручение. Репер Френе, формулы Френе. Различные виды кривых, примеры.
- Поверхность $z^2 - x^2 - 2y^2 = 1$.

Вариант № 5.

- Псевдоевклидовы пространства. Преобразования псевдоевклидовых пространств [1].
- Поверхность $x^2 + (y/2)^2 + z^2 = 1$.

Вариант № 6.

- Геометрия на поверхности в пространстве.
- Поверхность $(x/3)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Вариант № 7.

- Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны.
- Поверхность $z^2 - 2x^2 - 3y^2 = 1$.

Вариант № 8.

- Псевдоевклидовы пространства. Пространственно-подобные поверхности. Метрика псевдосферы. [1].
- Поверхность $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$.

Вариант № 9.

- Группы преобразований евклидова пространства.
- Поверхность $z = x^2 - y^2$.

Вариант № 10.

- Геодезические на поверхности и на римановом многообразии. Два определения. Вывод дифференциальных уравнений геодезических. Примеры геодезических на поверхности.
- Поверхность $z = 2x^2 - y^2$.

Вариант № 11.

- Асимптотические и линии кривизны на поверхности. Определение, свойства, примеры.
- Поверхность $z = 2x^2 - 3y^2$.

Вариант 12.

1. Пусть M параллелизуемо. X_1, K, X_n – параллелизация. Определим C по формуле:

$$C_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i) X_i,$$

где $Y = Y^i X_i$. Доказать, что $C_X Y$ линейная связность.

2. Для канонической связности на \mathbf{R}^2 выписать и решить уравнения геодезических

3. 5.1(a), 5.2(к)
 4. 5.4
 5. 5.10
 6. 6.1(a)

Вариант 13.

1. Пусть D_1, D_2, D_3 – стандартный базис в \mathbf{R}^3 . $X = \sum_{i=1}^3 j^i D_i$, $Y = \sum_{i=1}^3 y^i D_i$.

Ковариантная производная определена по формуле:

$$C_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i) X_i,$$

Докажите, что C – линейная связность.

2. Пусть $\tilde{C}_X Y = C_X Y + \frac{1}{2} X \Gamma Y$, где Γ – векторное произведение. Найдите для $(\mathbf{R}^3, \tilde{C})$ параллельное вдоль прямой:

$$t \in \mathbb{R} \quad 2t + 1$$

векторное поле, удовлетворяющее начальному условию $Y(0) = D_1|_0$.

3. 5.1(б), 5.2(и)
 4. 5.5
 5. 5.9
 6. 6.1(б)

Вариант 14.

1. Пусть $D_1 = \frac{\partial}{\partial u}$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial v}$ – стандартный базис (в $\mathbf{R}^3, (u, v)$).

$$X_1|_u = \cos(u^1) D_1|_u + \sin(u^1) D_2|_u;$$

$$X_2|_u = -\sin(u^1) D_1|_u + \cos(u^1) D_2|_u;$$

образуют параллелизацию на \mathbf{R}^2 . Ковариантная производная C определяется по формулам:

$$C_X Y = X(Y^1) X_1 + X(Y^2) X_2$$

2. Найдите символы Кристоффеля G_{ij}^k для этой связности, выпишите уравнения геодезических.

3. 5.1(в), 5.2(з)
 4. 5.6
 5. 5.8
 6. 6.1(в)

Вариант 15.

1. Пусть M параллелизуемо. X_1, \dots, X_n – параллелизация. Определим C по формуле:

$$C_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i) X_i,$$

где $Y = Y^i X_i$. Найдите $T(X_i, X_j)$.

2. Пусть D_1, D_2, D_3 – стандартный базис в \mathbf{R}^3 . $X = \sum_{i=1}^3 j^i D_i$, $Y = \sum_{i=1}^3 y^i D_i$.

Ковариантная производная определена по формуле:

$$C_X Y = \sum_{i=1}^3 X(y^i) X_i,$$

Пусть $\tilde{C}_X Y = C_X Y + \frac{1}{2} X \Gamma Y$, где Γ – векторное произведение. Найдите \tilde{R} .

3. 5.1(г), 5.2(ж)

4. 5.7

5. 5.17(а)

6. 6.1(г)

Вариант 16.

1. Пусть M параллелизуемо. X_1, \dots, X_n – параллелизация. Определим C по формуле:

$$C_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i) X_i,$$

где $Y = Y^i X_i$. Найдите R .

2. Пусть D_1, D_2, D_3 – стандартный базис в \mathbf{R}^3 . $X = \sum_{i=1}^3 j^i D_i$, $Y = \sum_{i=1}^3 y^i D_i$.

Ковариантная производная определена по формуле:

$$C_X Y = \sum_{i=1}^3 X(y^i) X_i,$$

Пусть $\tilde{C}_X Y = C_X Y + \frac{1}{2} X \Gamma Y$, где Γ – векторное произведение. Найдите \tilde{T} .

3. 5.1(г), 5.2(е)

4. 5.12

5. 5.18(б)

6. 6.1(д)

Вариант 17.

1. Дана поверхность в \mathbf{R}^3 уравнением $z = xy$, тогда (x, y) – координаты на этой поверхности. Найти связность Леви-Чевита метрики, индуцированной вложением поверхности в \mathbf{R}^3 .

2. Выписать уравнения геодезических этой метрики.

3. 17.7(a), 5.2(д)
4. 5.18(в)
5. 5.27
6. 6.1(е)

Вариант 18.

1. Дана поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Используйте псевдосферические координаты для параметризации этой поверхности. Найти связность Леви-Чевита метрики, индуцированной вложением поверхности в R^3 .
2. Выписать уравнения геодезических.
3. 17.7(б), 5.2(г)
4. 5.17(б)
5. 5.28
6. 6.2(ж)

2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену.

1. Симметрические и кососимметрические тензоры.
2. Операции симметрирования и альтернирования.
3. Симметрическое и внешнее произведения тензоров.
4. Криволинейные координаты.
5. Векторные и тензорные поля в евклидовом пространстве.
6. Ковариантная производная.
7. Основные дифференциальные операторы в криволинейных координатах.
8. Внешние дифференциальные формы. Внешний дифференциал.
9. Определение основных понятий римановой геометрии.
10. Абсолютная производная векторных и тензорных полей.
11. Параллельный перенос и геодезические линии.
12. Основная лемма римановой геометрии.
13. Риманов тензор кривизны. Различные типы кривизн.
14. Структурные уравнения Картана.
15. Основные понятия римановой геометрии.
16. Формулы первой и второй вариации длины дуги и энергии.
17. Векторные поля Якоби, сопряженные точки. Теорема о сопряженных точках.
18. Поля Якоби на симметрических пространствах.
19. Поля Якоби и сопряженные точки на симметрических пространствах.
20. Кривизна и топология риманова пространства.
21. Теорема Адамара- Картана.
22. Теорема Морса об индексе.
23. Теорема Майерса, ее следствия
23. Задайте локальные координаты на поверхности $z = x^2 + (y/2)^2$.
24. Найдите метрику индуцированную вложением поверхности в R^3 . Поверхность $z = x^2 + (y/2)^2$.

25. Найдите главные кривизны, среднюю и гауссову кривизну. Поверхность $z = x^2 + (y/2)^2$.
26. Вычислите символы Кристоффеля. Поверхность $z = x^2 + (y/2)^2$.
27. Найдите тензор кривизны. Поверхность $z = x^2 + (y/2)^2$.
28. Найдите тензор Риччи и сравните его с метрическим тензором. Поверхность $z = x^2 + (y/2)^2$.
29. Найдите скалярную кривизну. Поверхность $z = x^2 + (y/2)^2$.
30. Понятие тензорного произведения.
31. Понятие тензора.
32. Типы тензоров.
33. Примеры тензоров.
34. Операции над тензорами.
35. Тензорные поля, примеры.
36. Понятие дифференцируемого многообразия.
37. Карты, атласы, функции перехода. Примеры.
38. Понятие касательного вектора.
39. Понятие касательного пространства.
40. Понятие кокасательного вектора.
41. Понятие кокасательного пространства.
42. Понятие риманова многообразия.
43. Примеры риманова многообразия.
44. Метрический тензор.
45. Ковариантная производная.
46. Тензор кривизны.
47. Тензор Риччи.
48. Кривые в евклидовом пространстве.
49. Кривизна.
50. Кручение.
51. Репер Френе, формулы Френе.
52. Различные виды кривых, примеры.
53. Геометрия на поверхности в пространстве.
54. Вторая квадратичная форма поверхности.
55. Главные кривизны.
56. Координатные линии.
57. Локальный базис.
58. Векторные и тензорные поля в евклидовом пространстве. Их дифференцирование в криволинейных координатах.
59. Дана поверхность в \mathbf{R}^3 уравнением $z = xy$, тогда (x, y) – координаты на этой поверхности. Найти связность Леви-Чевита метрики, индуцированной вложением поверхности в \mathbf{R}^3 .
60. Дана поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Используйте псевдосферические координаты для параметризации этой поверхности. Найти связность Леви-Чевита метрики, индуцированной вложением поверхности в \mathbf{R}^3 .

61. Для заданной поверхности $z = (x/3)^2 + y^2$ задайте локальные координаты на поверхности.
62. Для заданной поверхности $z = (x/3)^2 + y^2$ найдите метрику индуцированную вложением поверхности в \mathbb{R}^3
63. Для заданной поверхности $z = (x/3)^2 + y^2$ найдите главные кривизны.
64. Для заданной поверхности $z = (x/3)^2 + y^2$ вычислите символы Кристоффеля.
65. Для заданной поверхности $z = (x/3)^2 + y^2$ найдите тензор кривизны.
66. Для заданной поверхности $z = (x/3)^2 + y^2$ найдите тензор Риччи.
67. Для заданной поверхности $z = (x/3)^2 + y^2$ найдите скалярную кривизну.
68. Для заданной поверхности $z = (x/3)^2 + y^2$ найдите среднюю кривизну.
69. Для заданной поверхности $z = (x/3)^2 + y^2$ найдите гауссову кривизну.
70. Дайте основные определения понятий римановой геометрии.